

El Origen de la Econofísica y el Principio del Bienestar del Colectivo

ESTEBAN GUEVARA HIDALGO*

Resumen

Se analizan las relaciones entre la Mecánica Cuántica y la Teoría de Juegos. A pesar de que ambas teorías describen dos sistemas aparentemente diferentes, se muestra como ambas son análogas y por tanto exactamente equivalentes, de tal forma que podemos tomar ciertos conceptos y definiciones de la Física para el mejor entendimiento de la Economía y de la Biología. Basados en esta analogía, se proponen ciertas relaciones de cuantización las cuales nos permitirían describir y solucionar a través de la mecánica cuántica problemas que antes estaban descritos a través de las teorías de juegos clásicos y evolutivos. El análogo cuántico del replicador dinámico es la ecuación de von Neumann. El equilibrio físico se da a través de la maximización del bienestar del colectivo. Si en un sistema se maximiza el bienestar del individuo sobre el del colectivo el sistema se vuelve inestable y eventualmente colapsa.

Abstract

We analyze the relationships between game theory and quantum mechanics. Although both systems analyzed are described through two apparently different theories i.e. quantum mechanics and game theory, it is shown that both are analogous and thus exactly equivalents. So, we can take some concepts and definitions from quantum mechanics and physics for the best understanding of the behavior of economics and biology. This let us propose certain quantization relationships through which we could describe and understand not only quantum but also classical, evolutionary and also the biological systems that were described before through game theories. The quantum analogue of the replicator dynamics is the von Neumann equation. This led us to propose a quantum equilibrium in which a system is stable only if it maximizes the welfare of the collective above the welfare of the individual. If it is maximized the welfare of the individual above the welfare of the collective the system gets unstable and eventually it collapses.

1. Introducción

Podría existir una relación entre la Mecánica Cuántica y la Teoría de Juegos? Podría la Mecánica Cuántica incluso contener a las teorías de juegos y a las dinámicas biológicas? Una relación real entre estas dos teorías que describen

*Físico de la Escuela Politécnica Nacional. esteban-guevarah@yahoo.es

dos sistemas aparentemente diferentes nos permitirían explicar procesos biológicos y económicos a través de la mecánica cuántica.

También podríamos tratar de encontrar un método el cual nos permita “cuantizar” un sistema clásico para analizarlo desde una perspectiva absolutamente diferente y bajo una definición de equilibrio físico que debería ser totalmente equivalente al definido en economía.

La Física trata de describir aproximadamente la naturaleza la cual es el más perfecto de los sistemas. El equilibrio en Física es la razón central para esta perfección por lo que tal vez podríamos pensar en hacer uso de ese equilibrio para su aplicación en sistemas conflictivos como los económicos.

El presente trabajo analiza las relaciones entre la Mecánica Cuántica y la Teoría de Juegos y propone a través de ciertas relaciones de cuantización un entendimiento cuántico de sistemas clásicos.

2. La Ecuación de von Neumann y la Mezcla Estadística de Estados

2.1. Ensambls Puros, Mezclados y el Operador de Densidad

Un *ensamble* es una colección de sistemas físicos preparados idénticamente. Cuando cada miembro del sistema está caracterizado por el mismo vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ se le llama *ensamble o estado puro*. Si cada miembro tiene una probabilidad p_i de estar en el estado $|\Psi_i(t)\rangle$ tenemos un *ensamble o estado mezclado*. Las probabilidades para cada estado deben satisfacer la condición de normalización $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Un *estado mezclado* es una mezcla estadística de estados puros. La evolución de cada estado puro va a estar dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle. \quad (1)$$

Para la correcta descripción de un estado mezclado es necesaria la introducción de un cierto operador de densidad

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^n p_i |\Psi_i(t)\rangle \langle \Psi_i(t)|. \quad (2)$$

El operador de densidad contiene toda la información física del ensamble puro o mezclado [1, 2]. Dos ensambles cualesquiera se dice que son *físicamente indistinguibles* si producen un mismo operador de densidad. Un estado puro

está especificado por $p_i = 1$ para algún $|\Psi_i(t)\rangle, i = 1, \dots, n$ y su operador de densidad ρ está representado por una matriz con todos sus elementos igual a cero excepto un 1 sobre la diagonal.

Supongamos que realizamos una medición de cierto observable A sobre cierto estado mezclado. El valor medio de A en ese ensamble está definido por el promedio de valores medios medidos en cada uno de los miembros del ensamble descritos por $|\Psi_i(t)\rangle$ y con probabilidad p_i

$$\begin{aligned}\langle A \rangle_\rho &= \sum_{i=1}^n p_i \langle \Psi_i(t) | A | \Psi_i(t) \rangle \\ \langle A \rangle_\rho &= \sum_{i,j,k=1}^n p_i a_{jk} c_j^{(i)*} c_k^{(i)}\end{aligned}\quad (3)$$

es decir, $\langle A \rangle_\rho = p_1 \langle A \rangle_1 + p_2 \langle A \rangle_2 + \dots + p_n \langle A \rangle_n$, donde a_{jk} son los elementos de la matriz que representa al observable A y $c_k^{(i)} = \langle k | \Psi_i(t) \rangle$, $c_j^{(i)*} = \langle \Psi_i(t) | j \rangle$ son los elementos del operador ρ .

2.2. Coherencias y Poblaciones

Los *elementos de la diagonal* ρ_{nn} del operador de densidad representan la probabilidad media de encontrar a un sistema en el estado $|n\rangle$

$$\begin{aligned}\rho_{nn} &= \sum_{i=1}^n \langle n | \Psi_i(t) \rangle p_i \langle \Psi_i(t) | n \rangle, \\ \rho_{nn} &= \sum_{i=1}^n p_i \left| c_n^{(i)} \right|^2,\end{aligned}\quad (4)$$

donde $c_n^{(i)} = \langle n | \Psi_i(t) \rangle$ y $\left| c_n^{(i)} \right|^2 \in \mathbb{R}^+$. Si el estado del sistema es $|\Psi_i(t)\rangle$, $\left| c_n^{(i)} \right|^2$ es la probabilidad de encontrar, en una medida, este sistema en el estado $|n\rangle$ (*Poblaciones*). Los elementos de la diagonal ρ_{nn} son cero, si y solo si, todos los términos $\left| c_n^{(i)} \right|^2$ son cero.

Los *elementos no-diagonales* ρ_{np} expresan los efectos de interferencia entre los estados $|n\rangle$ y $|p\rangle$ los cuales pueden aparecer cuando el estado $|\Psi_i\rangle$ es una

superposición coherente y lineal de estos estados (*Coherencias*)

$$\begin{aligned}\rho_{np} &= \sum_{i=1}^n \langle n | \Psi_i(t) \rangle p_i \langle \Psi_i(t) | p \rangle, \\ \rho_{np} &= \sum_{i=1}^n p_i c_n^{(i)} c_p^{(i)*},\end{aligned}\tag{5}$$

donde $c_n^{(i)}(t) = \langle n | \Psi_i(t) \rangle$, $c_p^{(i)*}(t) = \langle \Psi_i(t) | p \rangle$ y $c_n^{(i)} c_p^{(i)*} \in \mathbb{C}$. Si $\rho_{np} = 0$, esto significa que el promedio ha cancelado cualquier efecto de interferencia entre los estados $|n\rangle$ y $|p\rangle$, pero si es diferente de cero subsiste cierta coherencia entre estos estados.

2.3. La Ecuación de von Neumann

La evolución temporal del operador de densidad, el cual describe un ensamble puro o mezclado, está dada por la ecuación de von Neumann

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [\hat{H}(t), \rho(t)]\tag{6}$$

el cual es el análogo cuántico del teorema de Liouville de la mecánica clásica y es también una generalización de la ecuación de Schrödinger.

3. El Replicador Dinámico y la Teoría de Juegos Evolutivos

3.1. La Teoría de Juegos Clásicos y el Equilibrio de Nash

La *teoría de juegos* [3, 4, 5] es el estudio de la toma de decisiones de agentes que compiten en una situación conflictiva. Trata de entender el nacimiento y desarrollo de comportamientos conflictivos y cooperativos dentro de un grupo de individuos que se comportan estratégicamente de acuerdo con sus intereses personales. Cada miembro del grupo lucha para maximizar su bienestar, estado, utilidades o ganancias escogiendo el mejor curso de estrategias desde un punto de vista cooperativista o individualista. La teoría de juegos ha sido aplicada para resolver muchos problemas en Economía, Ciencias Sociales, Biología e Ingeniería.

El concepto central de equilibrio en teoría de juegos es el de *equilibrio de Nash* (NE). Un equilibrio de Nash es un par de estrategias tal que ningún jugador tiene un incentivo al cambiar unilateralmente su estrategia. Los jugadores están en equilibrio si un cambio en sus estrategias por alguno de ellos

le conduciría a ese jugador a ganar menos que si el mantuviera su estrategia actual. Un equilibrio de Nash satisface la siguiente condición

$$E(p, p) \geq E(r, p). \quad (7)$$

Un jugador no puede aumentar sus ganancias si decide jugar la estrategia r en lugar de p .

3.2. La Teoría de Juegos Evolutivos y las Estrategias Evolutivamente Estables

La *teoría de juegos evolutivos* [6, 7, 8] no se funda sobre supuestos de racionalidad (como la teoría de juegos clásicos) pero sí en la idea de que procesos de selección natural Darwinistas [9] conducen a los organismos hacia la optimización de su éxito reproductivo [10]. Combina los principios de la teoría de juegos clásicos, evolución y sistemas dinámicos para explicar la distribución de diferentes fenotipos en poblaciones biológicas. En lugar de trabajar por la mejor estrategia, los diferentes fenotipos en una población son asociados con estrategias básicas que se han formado a través de la prueba y el error en un proceso de selección natural o aprendizaje. Puede también ser utilizada para interpretar a los juegos clásicos desde una perspectiva diferente. En lugar de calcular directamente las propiedades de un juego, se simulan poblaciones de jugadores usando diferentes estrategias y se utiliza un proceso similar a la selección natural para determinar como evoluciona la población. Esto se hace a través del análisis de estabilidad de estas ecuaciones diferenciales y de sus implicaciones en el juego [11].

El concepto central de equilibrio de la teoría de juegos evolutivos es la noción de *estrategia evolutivamente estable* (Evolutionary Stable Strategy **ESS**) introducida por J. Smith y G. Price [12, 6]. Una ESS es descrita como una estrategia la cual tiene la propiedad de que si todos los miembros de una población la adoptan, ninguna estrategia mutante puede invadir la población bajo la influencia de un proceso de selección natural. Las ESS son interpretadas como los resultados estables de procesos de selección natural. El proceso de selección natural que determina cómo evolucionan las poblaciones jugando estrategias específicas se conoce como el *Replicador Dinámico* [13, 7, 8, 11] cuyos puntos fijos estables son equilibrios de Nash [4].

Las utilidades o ganancias en juegos biológicos se dan en términos de la “*aptitud*” (fitness), una medida del éxito reproductivo [10]. Las estrategias son consideradas programas heredados para cualquier situación concebible los cuales controlan el comportamiento del individuo. Los miembros de una población interactúan en una situación de tipo juego y la acción conjunta de procesos de selección y mutación reemplazan unas estrategias por otras con un mayor

éxito reproductivo. En este tipo de juegos o interacciones es menos importante conocer cuál miembro juega qué estrategia pero es realmente importante conocer la “*frecuencia relativa*” de las acciones, es decir la probabilidad con la que un jugador juega una estrategia.

Cada agente en un juego de n jugadores donde el $i^{\text{ésimo}}$ jugador tiene como espacio estratégico a S_i se modela por una población de jugadores los cuales tienen que ser particionados en grupos. Los individuos que pertenecen a un mismo grupo jugarán todos la misma estrategia. Aleatoriamente hacemos jugar a los miembros de las subpoblaciones unos en contra de otros. Las subpoblaciones que se desempeñen mejor crecerán y aquellas que no disminuirán hasta eventualmente desaparecer. El proceso de selección asegura la supervivencia de los mejores jugadores a expensas del resto. El equilibrio en una población ocurre cuando las utilidades esperadas para todas las estrategias son iguales.

Consideremos una población grande en la cual un juego de dos jugadores $G = (S, E)$ aleatoriamente apareados se juega generación tras generación. Sea p la estrategia jugada por la vasta mayoría de la población, y sea r una estrategia mutante presente en pequeña frecuencia. Ambas p y r pueden ser puras o mezcladas. Una *estrategia evolutivamente estable (ESS)* p de un juego simétrico entre dos personas $G = (S, E)$ es una estrategia pura o mezclada para G la cual satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} E(p, p) &> E(r, p), \\ \text{Si } E(p, p) &= E(r, p) \text{ entonces } E(p, r) > E(r, r). \end{aligned} \quad (8)$$

Debido a que la condición de estabilidad únicamente concierne a mejores respuestas alternativas, p es siempre evolutivamente estable si (p, p) es un punto de equilibrio estricto. Una ESS es también un equilibrio de Nash debido a que es la mejor respuesta a sí mismo y el juego es simétrico. El conjunto de todas las estrategias que son ESS es un subconjunto de los equilibrios de Nash del juego. Una población que juega una ESS puede resistir la invasión de un pequeño grupo de mutantes que juegan una estrategia diferente esto significa que si un pequeño grupo de individuos los cuales juegan una estrategia diferente se introducen en una población en un estado ESS, el proceso de selección natural eliminará eventualmente a los invasores. Las ESS son interpretadas como resultados estables de procesos de selección natural.

3.3. El Replicador Dinámico

El proceso de selección natural que determina como una población jugando estrategias específicas evoluciona es conocido como *replicador dinámico* [13]. Este describe la evolución de un estado polimórfico en una población representado por una estrategia mezclada q para G cuyos miembros están envueltos

en un conflicto descrito por un juego simétrico entre dos personas $G = (S, E)$. La probabilidad asignada a una estrategia pura s es denotada por $x(s)$. Si $s_i, i = 1, \dots, n \in S$ son las estrategias puras posibles para un jugador, entonces la estrategia de ese jugador va a estar denotada por un vector columna x donde sus elementos $x_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ en el cual la $i^{\text{ésima}}$ componente de x es la probabilidad de jugar la estrategia s_i . La $i^{\text{ésima}}$ componente de x es también interpretada como la frecuencia relativa de jugadores usando la estrategia s_i . El jugar una estrategia pura s_j es representado por el vector x cuya $j^{\text{ésima}}$ componente es 1 y todas las otras componentes 0. La función de utilidad está dada por $E = f_i(x), i = 1, \dots, n$ y especifica cuán exitosa es cada subpoblación. La función de utilidad debe ser definida para cada componente de x .

La *función de utilidad* para x_i es la utilidad esperada al jugar la estrategia s_i contra un jugador con una estrategia mezclada definida por un vector x y está dada por

$$f_i(x) = (Ax)_i, \quad (9)$$

donde A es la matriz de utilidad y el subíndice $i = 1, \dots, n$ denota la $i^{\text{ésima}}$ componente del producto matriz-vector. También

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad (10)$$

donde a_{ij} son los elementos de la matriz de utilidad A . La *utilidad media* de la población está dada por

$$\langle f(x) \rangle = x^T Ax, \quad (11)$$

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x), \quad (12)$$

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{k,l=1}^n a_{kl}x_l x_k, \quad (13)$$

en donde el superíndice T denota transpuesta.

La evolución de las frecuencias relativas de una población está descrita por el *Replicador Dinámico*

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = [f_i(x) - \langle f(x) \rangle] x_i(t). \quad (14)$$

Reemplazando las relaciones (9) y (11) en la ecuación (14) o reemplazando las relaciones (10) y (13) podemos obtener dos formas diferentes de representar

al replicador dinámico

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = [(Ax)_i - x^T Ax] x_i(t), \quad (15)$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k x_l \right] x_i(t). \quad (16)$$

Los puntos fijos estables del replicador dinámicos son equilibrios de Nash. Es importante notar que los puntos fijos de un sistema no varían en el tiempo. Esto significa que si una población alcanza un estado que es un equilibrio de Nash, se mantendrá ahí. Existen varias versiones de replicador dinámico [7, 8, 11, 13] dependiendo del modelo evolutivo usado. El replicador dinámico “premia” a las estrategias que sobresalgan del promedio aumentando su frecuencia relativa y “castiga” las estrategias de bajo desempeño disminuyendo su frecuencia relativa.

3.4. Representación Tipo Lax del Replicador Dinámico

El replicador dinámico puede ser representado en forma matricial [14, 15]. El replicador dinámico es una ecuación diferencial donde x es un vector columna. Obviamente, la matriz $U = (Ax)_i - x^T Ax$ es diagonal y sus elementos están dados por la siguiente expresión

$$u_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{l,k=1}^n a_{kl} x_l x_k. \quad (17)$$

De tal manera que el replicador dinámico puede ser expresado como

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ux(t). \quad (18)$$

Multiplicando cada elemento de x por su correspondiente $(x_i)^{-1/2}$ en ambas partes de la ecuación (18) podemos reescribirla como

$$v = U\hat{x}, \quad (19)$$

donde v y $\hat{x}$ son vectores columna que tienen como elementos $v_i = \frac{1}{(x_i)^{1/2}} \frac{dx_i}{dt}$ y $\hat{x}_i = (x_i)^{1/2}$ respectivamente. Multipliquemos la ecuación (19) por $\hat{x}^T$ y definamos a la matriz G como

$$G = \frac{1}{2} v \hat{x}^T, \quad (20)$$

donde $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{(x_j)^{1/2}}{(x_i)^{1/2}} \frac{dx_i}{dt}$ son los elementos de G . La matriz G es también igual a

$$G = \frac{1}{2} U \hat{x} \hat{x}^T \quad (21)$$

con $(U\hat{x}\hat{x}^T)_{ij} = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}x_kx_l \right] (x_ix_j)^{1/2}$. Hallemos G^T

$$G^T = \frac{1}{2}(v\hat{x}^T)^T = \frac{1}{2}(\hat{x}v^T), \quad (22)$$

donde $g_{ij}^T = \frac{1}{2} \frac{(x_i)^{1/2}}{(x_j)^{1/2}} \frac{dx_j}{dt}$ son los elementos de la matriz G^T . La matriz G^T es también

$$G^T = \frac{1}{2}(U\hat{x}\hat{x}^T)^T = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{x}^T U^T) \quad (23)$$

con $(\hat{x}\hat{x}^T U^T)_{ij} = (x_jx_i)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}x_kx_l \right]$. Definamos la variación temporal de una cierta matriz X como la suma de la matriz G y su transpuesta

$$\frac{dX}{dt} = G + G^T \quad (24)$$

de tal manera que X tenga como elementos

$$x_{ij} = (x_ix_j)^{1/2}. \quad (25)$$

La evolución temporal de X es también igual a

$$G + G^T = \frac{1}{2}(U\hat{x}\hat{x}^T + \hat{x}\hat{x}^T U^T) \quad (26)$$

con

$$\begin{aligned} (G + G^T)_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k (x_ix_j)^{1/2} \\ &\quad + \frac{1}{2} (x_jx_i)^{1/2} \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k \\ &\quad - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}x_kx_l (x_ix_j)^{1/2}. \end{aligned} \quad (27)$$

De la expresión anterior llamemos

$$(G_1)_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k (x_ix_j)^{1/2}, \quad (28)$$

$$(G_2)_{ij} = \frac{1}{2} (x_jx_i)^{1/2} \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k, \quad (29)$$

$$(G_3)_{ij} = \sum_{k,l=1}^n a_{kl}x_kx_l (x_ix_j)^{1/2} \quad (30)$$

los elementos de las matrices G_1 , G_2 , y G_3 que componen por adición a la matriz $(G + G^T)$. A las matrices G_1, G_2 y G_3 se las puede factorar en función de las matrices Q y X

$$G_1 = QX, \quad (31)$$

$$G_2 = XQ \quad (32)$$

$$G_3 = 2XQX \quad (33)$$

donde Q es una matriz diagonal que tiene como elementos $q_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$. Es fácil mostrar que $X^2 = X$ de tal manera que podemos reescribir la ecuación (24) haciendo uso de las ecuaciones (31), (32) y (33) como

$$\frac{dX}{dt} = QXX + XXQ - 2XQX \quad (34)$$

y finalmente podemos agrupar las matrices de la ecuación (34) haciendo uso de las propiedades de conmutación de tal manera que podamos expresarla como

$$\frac{dX}{dt} = [[Q, X], X], \quad (35)$$

$$\frac{dX}{dt} = [\Lambda, X], \quad (36)$$

donde $\Lambda = [Q, X]$. Los elementos de la matriz Λ están dados por

$$(\Lambda)_{ij} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k(x_i x_j)^{1/2} - (x_j x_i)^{1/2} \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k \right]$$

Es fácil darse cuenta que cada componente de esta matriz evolucionará siguiendo el replicador dinámico, es decir la ecuación (36) no es más que una *forma matricial del replicador dinámico*.

Si tomamos $\Theta = [\Lambda, X]$, la ecuación (36) se convierte en

$$\frac{dX}{dt} = \Theta, \quad (37)$$

donde los elementos de Θ están dados por

$$\begin{aligned} (\Theta)_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k(x_i x_j)^{1/2} \\ &\quad + \frac{1}{2} (x_j x_i)^{1/2} \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k \\ &\quad - \sum_{k,l=1}^n a_{lk}x_k x_l (x_i x_j)^{1/2}. \end{aligned} \quad (38)$$

4. Relaciones entre la Teoría de Juegos y la Mecánica Cuántica

En las siguiente tabla [16] se comparan algunos aspectos característicos de la mecánica cuántica y la teoría de juegos

Table 1

Mecánica Cuántica	Teoría de Juegos
n miembros del sistema	n jugadores
Estados cuánticos	Estrategias
Operador de Densidad	Vector de Frecuencias relativas
ecuación de von Neumann	Replicador Dinámico
entropía de von Neumann	entropía de Shannon
Equilibrio del sistema	Ganancias
Máxima entropía	Máxima ganancia
“Altruismo”	Altruismo o egoismo
Bienestar del Colectivo	Bienestar de la minoría

Es fácil reconocer las claras semejanzas y aparentes diferencias entre ambos sistemas. Esta fue una motivación para tratar de buscar una relación real entre la mecánica cuántica y la teoría de juegos.

Ambos sistemas están compuestos de n miembros (partículas, subsistemas, jugadores, etc.). Cada miembro está descrito por un estado o una estrategia los cuales tienen asignada una determinada probabilidad. El sistema mecánico cuántico está descrito por el operador de densidad ρ cuyos elementos representan la probabilidad de que el sistema se encuentre en un determinado estado y su evolución está dada por la ecuación de von Neumann que es una ecuación matricial. Mientras que para el caso de la teoría de juegos evolutivos, se definió a la matriz X o matriz de frecuencias relativas cuyos elementos representan la frecuencia de jugadores jugando una determinada estrategia y su evolución está descrita por la versión matricial del replicador dinámico (36) propuesta, que es además una generalización del replicador dinámico en forma vectorial [16, 17].

En la siguiente tabla se muestran algunas semejanzas específicas entre la mecánica cuántica estadística y la teoría de juegos evolutivos

Table 2

Mecánica Cuántica Estadística	Teoría de Juegos Evolutivos
n miembros del sistema	n miembros de la población
Cada miembro en el estado $ \Psi_k\rangle$	Cada miembro juega la estrategia s_i
$ \Psi_k\rangle$ con $p_k \rightarrow \rho_{ij}$	$s_i \rightarrow x_i$
$\rho, \sum_i \rho_{ii} = 1$	$X, \sum_i x_i = 1$
$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [\hat{H}, \rho]$	$\frac{dX}{dt} = [\Lambda, X]$
$S = -Tr\{\rho \ln \rho\}$	$H = -\sum_i x_i \ln x_i$

En la tabla 3 se muestran las propiedades de las matrices ρ y X .

Table 3

Operador de Densidad	Matriz de Freq. Relativas
ρ es Hermitiana	X es Hermitiana
$Tr\rho(t) = 1$	$TrX = 1$
$\rho^2(t) \leq \rho(t)$	$X^2 = X$
$Tr\rho^2(t) \leq 1$	$TrX^2(t) = 1$

A pesar que ambos sistemas son diferentes, ambos son análogos y por lo tanto exactamente equivalentes.

5. Relaciones de Cuantización y el Replicador Dinámico Cuántico

Las semejanzas entre ambos sistemas y la similaridad en las propiedades de sus elementos correspondientes nos permiten definir y proponer las siguientes relaciones de cuantización

$$\begin{aligned}
 x_i &\longrightarrow \sum_{k=1}^n \langle i | \Psi_k \rangle p_k \langle \Psi_k | i \rangle = \rho_{ii}, \\
 (x_i x_j)^{1/2} &\longrightarrow \sum_{k=1}^n \langle i | \Psi_k \rangle p_k \langle \Psi_k | j \rangle = \rho_{ij}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Una población será representada por un sistema cuántico en el cual cada subpoblación que juega una estrategia s_i será representada por un ensamble puro en el estado $|\Psi_k(t)\rangle$ y con probabilidad p_k . La probabilidad x_i de jugar la estrategia s_i o la frecuencia relativa de individuos usando la estrategia s_i en esa población será representada con la probabilidad ρ_{ii} de encontrar cada ensamble puro en el estado $|i\rangle$.

A través de estas relaciones de cuantización el análogo cuántico del replicador dinámico es la ecuación de von Neumann, y además

$$X \longrightarrow \rho \quad (40)$$

$$\Lambda \longrightarrow -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \quad (41)$$

Estas relaciones nos permitirían no solamente cuantizar juegos (ya sea clásicos o evolutivos) sino también sistemas biológicos descritos por dinámicas evolutivas (es decir por el replicador dinámico).

6. Máxima Entropía y el Principio del Bienestar del Colectivo

Si en un sistema aislado cada uno de sus estados accesibles no tienen la misma probabilidad, el sistema no se encuentra en equilibrio. El sistema variará y evolucionará en el tiempo hasta que alcance el estado de equilibrio cuando la probabilidad de encontrar al sistema en cada uno de sus estados accesibles sea la misma. Entonces el sistema encontrará su configuración más probable en la cual el número de estados accesibles es máximo y equiprobable. Todo el sistema variará y reorganizará su estado y los estados de sus ensambles con el propósito de maximizar su entropía. Podríamos decir que el propósito y máxima utilidad de un “juego” de este tipo es el equilibrio del sistema es decir su estado de máxima entropía.

El sistema y sus miembros variarán y se reorganizarán a sí mismos para alcanzar el mejor estado posible para cada uno de ellos el cual es también el mejor estado posible para todo el sistema. Esto puede ser visto como una cooperación microscópica entre objetos cuánticos para mejorar su estado con el propósito de alcanzar o mantener el equilibrio del sistema. Todos los miembros de nuestro sistema cuántico participarán en un juego en el cual su máxima ganancia será el equilibrio del sistema. Partículas diferentes cooperarán para formar un sistema en el cual su nuevo estado tendrá que ser mejor que el estado que tenían antes de que interactúen para formar un átomo. Átomos diferentes cooperarán para formar un sistema en el cual su nuevo estado tendrá que ser mejor del que tenían antes de formar lo que se conoce como molécula inorgánica.

Los miembros del sistema actúan como un todo en lugar de como individuos como si obedecieran una regla en la que ellos prefirieran el bienestar del colectivo sobre su bienestar individual. El sistema es estable solo si maximiza el bienestar del colectivo por encima del bienestar del individuo, si maximiza el bienestar del individuo por encima del bienestar del colectivo el sistema se vuelve inestable y eventualmente colapsa.

7. Conclusiones

Se ha mostrado que a través de las relaciones de cuantización propuestas, la versión cuántica del replicador dinámico es la ecuación de evolución de estados mezclados de un sistema cuántico. Una población es representada por un sistema cuántico en el cual cada subpoblación jugando la estrategia s_i es representada por un ensamble puro en el estado $|\Psi_k\rangle$ y con probabilidad p_k . La probabilidad x_i de jugar la estrategia s_i o la frecuencia relativa de individuos usando la estrategia s_i en esa población será representada con la probabilidad ρ_{ii} de encontrar a cada ensamble puro en el estado $|i\rangle$.

A través de la mecánica cuántica podemos describir procesos biológicos y económicos desde una perspectiva diferente y con una definición cuántica de equilibrio que es más general que cualquiera definida clásicamente.

El propósito y máxima utilidad de un sistema es mejorar su estado maximizando el bienestar de sus miembros a través de la maximización del bienestar del sistema. En un sistema cuántico la máxima utilidad es el equilibrio del sistema a través del principio de máxima entropía. El sistema y sus miembros cooperarán y reorganizarán sus estados para mejorar su condición actual.

Un sistema es estable solo si éste maximiza el bienestar del colectivo por encima del bienestar del individuo. Si se maximiza el bienestar del individuo por encima del bienestar del colectivo, el sistema se vuelve inestable y eventualmente colapsa [14, 15, 16, 17, 18, 19].

Referencias

- [1] C. Tanoudji, B. Diu, Lao, *Quantum Mechanics*, (Herman, Paris, 1977).
- [2] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison - Wesley, 1994).
- [3] J. von Neumann, O. Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton University Press, Princeton, 1947).
- [4] R. B. Myerson, *Game Theory: An Analysis of Conflict* (MIT Press, Cambridge, 1991).
- [5] M. A. Nowak and K. Sigmund, *Nature* **398**, 367 (1999).
- [6] J. M. Smith, *Evolution and The Theory of Games* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982).
- [7] J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Replicator Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998).

- [8] J. Weibull, *Evolutionary Game Theory* (MIT Press, Cambridge, MA, 1995).
- [9] R. A. Fisher, *The Genetic Theory of Natural Selection* (Oxford, Clarendon Press, 1930).
- [10] P. Hammerstein and R. Selten, *Game Theory and Evolutionary Biology* (Handbook of Game Theory. Vol 2. Elsevier B.V., 1994).
- [11] R. Cressman, *The Stability Concept of Evolutionary Game Theory: A Dynamic Approach* (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [12] J. M. Smith and G. R. Price, *The logic of animal conflict*, Nature **246**, 15 (1973).
- [13] P. D. Taylor and L. B. Jonker, *Evolutionary stable strategies and game dynamics*, Mathematical Biosciences **40**, 145-156 (1978).
- [14] E. Guevara H., *Quantum Replicator Dynamics*, PHYSICA A **369/2**, 393-407 (2006).
- [15] E. Guevara H., *Relaciones entre el replicador dinámico y la mecánica cuántica, y sus implicaciones en economía teórica*, Tesis de Físico, EPN (2006).
- [16] E. Guevara H., *The Why of the applicability of Statistical Physics to Economics*.
- [17] E. Guevara H., *Quantum Econophysics*, to be presented at QI-2007 to be held in Stanford U. and published by the American Association Artificial Intelligence AAAI, quant-ph/0609245.
- [18] E. Guevara H., *Introduction to the study of entropy in Quantum games*, quant-ph/0604170.
- [19] E. Guevara H., *Quantum Games Entropy*.